

با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!



کنکور

آزمون های آزمایشی

گام به گام

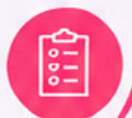
جزوه و نمونه سوال



ایران توشه

توشه ای برای موفقیت

ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها



دانلود رایگان آزمون های آزمایشی
قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...



دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس



دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی
(نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی



دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی
و شب امتحانی

همه چیز
برای موفقیت
تو!

Google

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

کافیست هر فایلی که نیاز دارید
را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir



t.me/irantooshe





گام به گام ریاضی هشتم

فصل هشتم

عنوان فصل: آمار و احتمال

از صفحه‌ی ۱۱۵ تا صفحه‌ی ۱۳۴ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل آمار و احتمال آمده است.
مباحث فصل: آمار و احتمال

تهیه شده در ایران توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱	صفحه ۱۱۵ · پرسش — آمار و احتمال — آغاز فصل ۶
۲	صفحه ۱۱۷ · تمرین — گفت‌وگو — روش غزاله برای میانگین ۶
۳	صفحه ۱۱۸ · مسئله — دسته‌بندی داده‌ها و میانگین — ۱ ۷
۴	صفحه ۱۱۹ · مسئله — دسته‌بندی داده‌ها و میانگین — ۲ ۷
۵	صفحه ۱۲۰ · مسئله — دسته‌بندی داده‌ها و میانگین — ۳ ۹
۶	صفحه ۱۲۰ · مسئله — دسته‌بندی داده‌ها و میانگین — ۴ ۱۰
۷	صفحه ۱۲۰ · مسئله — دسته‌بندی داده‌ها و میانگین — ۵ ۱۰
۸	صفحه ۱۲۱ · مسئله — دسته‌بندی داده‌ها و میانگین — ۶ ۱۱
۹	صفحه ۱۲۱ · مسئله — دسته‌بندی داده‌ها و میانگین — ۷ ۱۲
۱۰	صفحه ۱۲۲ · مسئله — دسته‌بندی داده‌ها و میانگین — ۸ ۱۳
۱۱	صفحه ۱۲۲ · مسئله — دسته‌بندی داده‌ها و میانگین — ۹ ۱۳
۱۲	صفحه ۱۲۲ · مسئله — دسته‌بندی داده‌ها و میانگین — ۱۰ ۱۳

۱۴		صفحه ۱۲۲ - مسئله - دسته‌بندی داده‌ها و میانگین - ۱۱	۱۳
۱۵		صفحه ۱۲۳ - مسئله - دسته‌بندی داده‌ها و میانگین - ۱۲	۱۴
۱۵		صفحه ۱۲۳ - مسئله - دسته‌بندی داده‌ها و میانگین - ۱۳	۱۵
۱۶		صفحه ۱۲۳ - مسئله - دسته‌بندی داده‌ها و میانگین - ۱۴	۱۶
۱۶		صفحه ۱۲۴ - مسئله - دسته‌بندی داده‌ها و میانگین - ۱۵	۱۷
۱۷		صفحه ۱۲۶ - مسئله - احتمال یا اندازه‌گیری شانس - ۱	۱۸
۱۸		صفحه ۱۲۶ - مسئله - احتمال یا اندازه‌گیری شانس - ۲	۱۹
۱۸		صفحه ۱۲۶ - مسئله - احتمال یا اندازه‌گیری شانس - ۳	۲۰
۱۹		صفحه ۱۲۷ - مسئله - احتمال یا اندازه‌گیری شانس - ۴	۲۱
۲۰		صفحه ۱۲۷ - مسئله - احتمال یا اندازه‌گیری شانس - ۵	۲۲
۲۰		صفحه ۱۲۸ - مسئله - احتمال یا اندازه‌گیری شانس - ۶	۲۳
۲۱		صفحه ۱۲۸ - مسئله - احتمال یا اندازه‌گیری شانس - ۷	۲۴
۲۱		صفحه ۱۲۹ - مسئله - احتمال یا اندازه‌گیری شانس - ۸	۲۵
۲۲		صفحه ۱۲۹ - مسئله - بررسی حالت‌های ممکن - ۱	۲۶

۲۴		صفحه ۱۳۱ - مسئله - بررسی حالت‌های ممکن - ۲	۲۷
۲۵		صفحه ۱۳۱ - مسئله - بررسی حالت‌های ممکن - ۳	۲۸
۲۶		صفحه ۱۳۲ - مسئله - بررسی حالت‌های ممکن - ۴	۲۹
۲۷		صفحه ۱۳۲ - مسئله - بررسی حالت‌های ممکن - ۵	۳۰
۲۷		صفحه ۱۳۲ - مسئله - بررسی حالت‌های ممکن - ۶	۳۱
۲۷		صفحه ۱۳۲ - مسئله - بررسی حالت‌های ممکن - ۷	۳۲
۲۸		صفحه ۱۳۳ - مسئله - بررسی حالت‌های ممکن - ۸	۳۳
۲۸		صفحه ۱۳۳ - مسئله - بررسی حالت‌های ممکن - ۹	۳۴
۲۹		صفحه ۱۳۴ - مسئله - بررسی حالت‌های ممکن - ۱۰	۳۵
۲۹		صفحه ۱۳۴ - مسئله - بررسی حالت‌های ممکن - ۱۱	۳۶
۲۹		صفحه ۱۳۴ - مسئله - بررسی حالت‌های ممکن - ۱۲	۳۷
۳۰		صفحه ۱۳۴ - مسئله - بررسی حالت‌های ممکن - ۱۳	۳۸

راهپیمایی اربعین در سال ۱۳۹۳ بیست میلیون نفر تخمین زده شده است. به نظر شما این عدد را چگونه به دست آورده‌اند؟

شمردن یک به یک بیست میلیون نفر شدنی نیست؛ به جای آن، عدد را «تخمین» می‌زنند، یعنی از یک نمونه‌ی کوچک‌تر به کل نتیجه می‌گیرند. چند روش ممکن:

۱. **شمارش در یک مقطع:** در چند نقطه‌ی مسیر (مثلاً ورودی‌های شهر)، تعداد افراد گذرنده در یک بازه‌ی کوتاه (مثلاً ۱۰ دقیقه) را می‌شمارند و با تعداد بازه‌های زمانی و تعداد نقطه‌ها ضرب می‌کنند.
۲. **تراکم جمعیت:** در یک قسمت کوچک از مسیر یا میدان، تعداد افراد در هر متر مربع را شمرده و در مساحت کل ضرب می‌کنند.
۳. **نمونه‌گیری و آمارگیری:** از تعدادی از گروه‌ها یا کاروان‌ها تعداد اعضا را می‌پرسند، میانگین می‌گیرند و در تعداد کل گروه‌ها ضرب می‌کنند.

این‌ها روش‌های نمونه‌ی تخمین‌اند؛ کتاب روش دقیقی را که برای عدد گفته شده به کار رفته مشخص نکرده است.

تمرین. با روش غزاله میانگین هر دسته از اعداد زیر را به دست آورید.

الف) ۱۶۲، ۱۵۵، ۱۵۷، ۱۶۳، ۱۵۹

ب) ۱۷، ۱۶، ۱۵، ۱۹، ۲۰، ۱۶، ۱۷

روش غزاله: یک مقدار حدسی (مثلاً عددی نزدیک به داده‌ها) انتخاب می‌کنیم، تفاضل هر داده را از آن حساب می‌کنیم، میانگین این تفاضل‌ها را از تقسیم مجموعشان بر تعداد به دست می‌آوریم و با مقدار حدسی جمع می‌کنیم.

الف) مقدار حدسی را ۱۶۰ می‌گیریم. تفاضل‌ها: $۱۶۰ - ۱۵۹ = ۱$ ، $۱۶۰ - ۱۶۳ = -۳$ ، $۱۶۰ - ۱۵۷ = ۳$ ، $۱۶۰ - ۱۵۵ = ۵$ ، $۱۶۰ - ۱۶۲ = -۲$. مجموع تفاضل‌ها: $۱ - ۳ + ۳ + ۵ - ۲ = ۴$. تقسیم بر ۵: $۴ \div ۵ = ۰٫۸$. میانگین: $۱۶۰ + ۰٫۸ = ۱۶۰٫۸$.

ب) مقدار حدسی را ۱۷ می‌گیریم. تفاضل‌ها: $۱۷ - ۱۶ = ۱$ ، $۱۷ - ۱۵ = ۲$ ، $۱۷ - ۱۹ = -۲$ ، $۱۷ - ۲۰ = -۳$ ، $۱۷ - ۱۷ = ۰$ ، $۱۷ - ۱۶ = ۱$. مجموع تفاضل‌ها: $۱ + ۲ - ۲ - ۳ + ۰ + ۱ = -۱$. تقسیم بر ۶: $-۱ \div ۶ = -۰٫۱۶۷$. میانگین: $۱۷ - ۰٫۱۶۷ = ۱۶٫۸۳۳$.

راستی‌آزمایی با تعریف میانگین (مجموع $\div$ تعداد): $۱۶۰٫۸ \div ۵ = ۳۲٫۱۶$ و $۱۶۰٫۸ \div ۶ = ۲۶٫۸$. (تقریباً ۱۷، ۱۶٫۸۳۳).

پاسخ: میانگین دسته‌ی الف برابر $۱۵۹/۳$ و میانگین دسته‌ی ب برابر $۱۷\frac{1}{۳}$ است.

۳

صفحه ۱۱۸

مسئله

۱. با مراجعه به وبگاه «www.webmath.ir» می‌توانید به اطلاعات مربوط به هر یک از بازیکنان حاضر در لیگ جهانی والیبال دسترسی پیدا کنید.

الف) قد والیبالیست‌هایی که بین ۱۹۵ تا ۲۱۰ است را به پنج دسته‌ی مساوی تقسیم کنید و سپس جدول فراوانی مربوط به این پنج دسته را تشکیل دهید.

ب) میانگین قد والیبالیست‌ها در کدام دسته قرار دارد؟

ج) نمودار ستونی مربوطه را رسم کنید. در نمودار ستونی رسم شده، کدام دسته بلندترین ارتفاع را دارد و این چه معنایی دارد؟

د) آیا نمودار رسم شده متقارن است؟

داده‌های قد بازیکنان فقط در وبگاه آمده است. روش: طول بازه $۲۱۰ - ۱۹۵ = ۱۵$ و پهنای هر دسته $۱۵ \div ۵ = ۳$ است: $۱۹۵-۱۹۸$ ، $۱۹۸-۲۰۱$ ، $۲۰۱-۲۰۴$ ، $۲۰۴-۲۰۷$ ، $۲۰۷-۲۱۰$. قد هر بازیکن را در دسته خودش با خط می‌شماریم (فراوانی). مرکز دسته‌ها $۱۹۶/۵$ ، $۱۹۹/۵$ ، $۲۰۲/۵$ ، $۲۰۵/۵$ ، $۲۰۸/۵$ است و میانگین $\approx$ (مجموع «مرکز $\times$ فراوانی») $\div$ (مجموع فراوانی‌ها) است؛ میانگین در دسته‌ای می‌افتد که این عدد در آن باشد. نمودار ستونی: بازه دسته‌ها روی محور افقی و فراوانی روی محور عمودی؛ بلندترین ستون یعنی بیشتر بازیکنان قدی در آن دسته دارند. اگر ستون‌ها دوطرف بلندترین ستون تقریباً برابر باشند، نمودار متقارن است.

مثال فرضی (نه داده‌ی واقعی): فراوانی‌ها ۲، ۵، ۸، ۴، ۱ (جمعاً ۲۰ نفر): میانگین $\approx (۱۹۶/۵ \times ۲ + ۱۹۹/۵ \times ۵ + ۲۰۲/۵ \times ۸ + ۲۰۵/۵ \times ۴ + ۲۰۸/۵ \times ۱) \div ۲۰ = ۲۰۲/۵$ که در دسته $۲۰۴-۲۰۷$ است؛ بلندترین ستون هم همین دسته است و نمودار تقریباً متقارن است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



۴

صفحه ۱۱۹

مسئله

۲. نمودار زیر، نمودار نمره‌های تعدادی دانش‌آموز در یک آزمون ۲۵ نمره‌ای است.

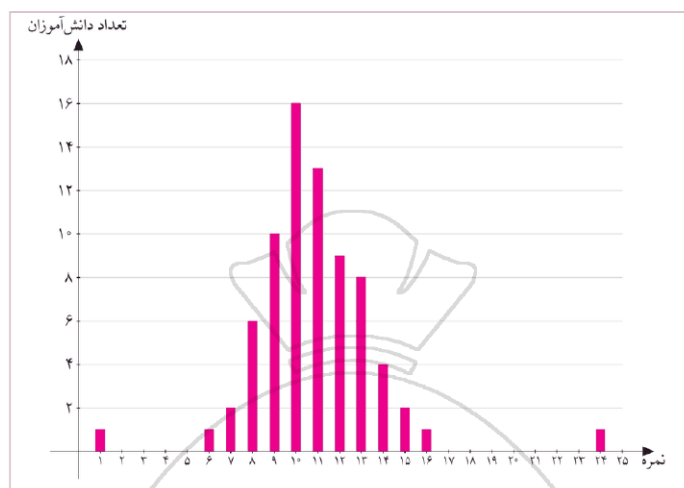
الف) تعداد دانش‌آموزان شرکت کننده در آزمون چقدر است؟

ب) نمره‌ی چند دانش‌آموز از میانگین بیشتر است؟

ج) اگر دو نفری را که کمترین و بیشترین نمره را گرفته‌اند، حذف کنیم، میانگین و دامنه‌ی تغییرات چگونه تغییر می‌کند؟

د) این ۲۵ نمره را به ۵ دسته‌ی مساوی تقسیم کنید. جدول فراوانی تشکیل دهید که شامل فراوانی هر دسته، مرکز دسته و مرکز دسته $\times$ فراوانی آن باشد. برای این جدول نمودار ستونی رسم کنید.

ه) این بار میانگین نمرات را با توجه به جدول فراوانی قسمت قبل به دست آورید. میانگین جدید چقدر با میانگین واقعی اختلاف دارد؟



از روی نمودار، ارتفاع میله‌ی هر نمره (تعداد دانش‌آموزان آن نمره) را می‌خوانیم:

نمره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۲۴
تعداد	۱	۱	۰	۰	۰	۱	۲	۶	۱۰	۱۶	۱۳	۹	۸	۴	۲	۱	۱

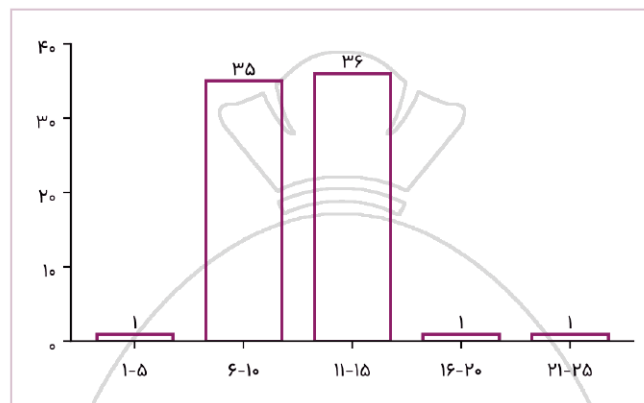
الف) مجموع تعدادها: $۱+۱+۲+۶+۱۰+۱۶+۱۳+۹+۸+۴+۲+۱+۱ = ۷۴$. پس ۷۴ دانش‌آموز در آزمون شرکت کرده‌اند.

ب) مجموع نمره‌ها: $۱ \times ۱ + ۲ \times ۱ + ۳ \times ۰ + ۴ \times ۰ + ۵ \times ۰ + ۶ \times ۱ + ۷ \times ۲ + ۸ \times ۶ + ۹ \times ۱۰ + ۱۰ \times ۱۶ + ۱۱ \times ۱۳ + ۱۲ \times ۹ + ۱۳ \times ۸ + ۱۴ \times ۴ + ۱۵ \times ۲ + ۱۶ \times ۱ + ۲۴ \times ۱ = ۸۰۰$. میانگین = مجموع $\div$ تعداد = $\frac{۸۰۰}{۷۴} \approx \frac{۴۰۰}{۳۷} \approx ۱۰,۸۱$. نمره‌های بیشتر از میانگین، نمره‌های ۱۱ و بالاتر هستند: $۱۳ + ۹ + ۸ + ۴ + ۲ + ۱ + ۱ = ۳۸$. پس نمره‌ی ۳۸ دانش‌آموز از میانگین بیشتر است.

ج) کمترین نمره ۱ و بیشترین نمره ۲۴ است. با حذف آن‌ها ۷۲ نفر می‌ماند و مجموع نمره‌ها $۸۰۰ - ۱ - ۲۴ = ۷۷۵$ می‌شود؛ میانگین جدید $\frac{۷۷۵}{۷۲} \approx ۱۰,۷۶$. پس میانگین از $۱۰,۸۱$ به $۱۰,۷۶$ می‌رسد و فقط اندکی (حدود ۰,۰۵) کم می‌شود. دامنه‌ی تغییرات (بیشترین - کمترین) از $۲۴ - ۱ = ۲۳$ به $۱۶ - ۶ = ۱۰$ کاهش می‌یابد، یعنی بیش از نصف می‌شود. نتیجه: داده‌های پرت اثر کمی بر میانگین ولی اثر زیادی بر دامنه دارند.

د) ۲۵ نمره‌ی ممکن (۱ تا ۲۵) را به ۵ دسته‌ی ۵ تایی تقسیم می‌کنیم. مرکز هر دسته میانگین ابتدا و انتهای آن است؛ مثلاً $۳ = (۱+۲۵) \div ۲$.

دسته	فراوانی	مرکز دسته	مرکز دسته × فراوانی
۱ تا ۵	۱	۳	۳
۶ تا ۱۰	$۳۵ = ۱+۲+۶+۱۰+۱۶$	۸	۲۸۰
۱۱ تا ۱۵	$۳۶ = ۱۳+۹+۸+۴+۲$	۱۳	۴۶۸
۱۶ تا ۲۰	۱	۱۸	۱۸
۲۱ تا ۲۵	۱	۲۳	۲۳
جمع	۷۴		۷۹۲



(نمودار ستونی: محور افقی دسته‌ها و محور عمودی فراوانی؛ ارتفاع میله‌ها ۱، ۳۶، ۳۵، ۱ و ۱)

۵) میانگین با جدول فراوانی = مجموع (مرکز دسته × فراوانی) ÷ مجموع فراوانی‌ها = $\frac{۷۹۲}{۷۴} = \frac{۳۹۶}{۳۷} \approx ۱۰٫۷۰$.
 اختلاف با میانگین واقعی: $\frac{۴۰۰}{۳۷} - \frac{۳۹۶}{۳۷} = \frac{۴}{۳۷} \approx ۰٫۱۱$. یعنی میانگین به دست آمده از جدول فقط حدود ۰٫۱۱ نمره از میانگین واقعی کمتر است.

ایران نوین
 نوشته ای برای موفقیت

مسئله

صفحه ۱۲۰

۵

۳. به نظر شما چرا از مرکز دسته برای میانگین گیری استفاده می‌کنیم؟

وقتی داده‌ها را دسته‌بندی کرده‌ایم، دیگر مقدار دقیق هر داده را نمی‌دانیم و فقط می‌دانیم داخل کدام دسته است. پس باید یک عدد را نماینده‌ی همه‌ی داده‌های آن دسته بگیریم. مرکز دسته (وسط بازه‌ی دسته) بهترین انتخاب است، زیرا:

- فاصله‌ی هر داده‌ی دسته تا مرکز دسته حداکثر نصف پهنای دسته است؛ پس خطا کوچک می‌ماند.
- داده‌های کوچک‌تر از مرکز (که میانگین را کمتر برآورد می‌کنند) و داده‌های بزرگ‌تر از مرکز (که بیشتر برآورد می‌کنند) تا حدی یکدیگر را خنثی می‌کنند.

۴. فرض کنید ۱۰۰ نمره بین ۰ تا ۲۰ داریم. این ۱۰۰ نمره را به ۵ دسته‌ی مساوی تقسیم کرده‌ایم و برای آنها جدول فراوانی تشکیل داده‌ایم. یک بار میانگین واقعی این ۱۰۰ داده را به دست می‌آوریم و بار دیگر با استفاده از جدول فراوانی و مرکز دسته، میانگین را به دست می‌آوریم. حداکثر اختلاف میانگین واقعی و میانگین به دست آمده از جدول فراوانی چقدر می‌تواند باشد؟ با تغییر تعداد دسته‌ها، این اختلاف چگونه تغییر می‌کند؟

پهنای هر دسته: $4 = 20 \div 5$ (دسته‌ها: ۰-۴، ۴-۸، ۸-۱۲، ۱۲-۱۶، ۱۶-۲۰). مرکز دسته‌ها: ۲، ۶، ۱۰، ۱۴، ۱۸.

۱. هر داده داخل یک دسته است و فاصله‌اش تا مرکز همان دسته حداکثر نصف پهنای آن است، یعنی $4 \div 2 = 2$ است. پس هر داده با «مرکز دسته‌اش» حداکثر ۲ واحد اختلاف دارد.

۲. میانگین واقعی برابر مجموع داده‌ها $\div 100$ و میانگین جدول برابر مجموع مرکز دسته‌ی داده‌ها $\div 100$ است. اختلاف این دو، میانگین اختلاف‌های ۱۰۰ داده است؛ چون هر اختلاف حداکثر ۲ است، میانگین آن‌ها هم حداکثر ۲ است.

۳. این مقدار قابل دست‌یابی است؛ اگر هر دسته ۲۰ داده داشته باشد و همه‌ی داده‌ها در انتهای بالای دسته (۴، ۸، ۱۲، ۱۶ و ۲۰) باشند، میانگین واقعی $12 = 5 \div (20 + 16 + 12 + 8 + 4)$ و میانگین جدول $10 = 5 \div (18 + 14 + 10 + 6 + 2)$ است و اختلاف ۲ می‌شود.

پاسخ: حداکثر اختلاف برابر ۲ نمره است.

اثر تعداد دسته‌ها: اگر تعداد دسته‌ها k باشد، پهنای دسته $20 \div k$ و حداکثر اختلاف نصف آن، یعنی $\frac{10}{k}$ است. مثلاً با ۲ دسته ۵، با ۵ دسته ۲، با ۱۰ دسته ۱ و با ۲۰ دسته ۰٫۵. پس هرچه تعداد دسته‌ها بیشتر شود (پهنای دسته‌ها کمتر)، حداکثر اختلاف کمتر می‌شود و برآورد به میانگین واقعی نزدیک‌تر می‌شود.

۵. در روزنامه‌ای مطلبی در مورد یکی از دانشگاه‌هایی که بدون آزمون دانشجو می‌پذیرد، اعلام شده است. بنابه آمار ۶۸٪ پسرانی که جهت پذیرش در یکی از رشته‌های معماری و مهندسی اقدام می‌کنند در رشته‌ی مورد علاقه‌ی خود پذیرفته می‌شوند. درحالی‌که فقط ۵۱٪ از متقاضیان خانم که در رشته‌های معماری و مهندسی خواهان پذیرش در این دانشگاه هستند، پذیرفته می‌شوند.

الف) باتوجه به جدول فوق، چند درصد از متقاضیان خانم و چند درصد از متقاضیان آقا در دانشکده‌ی مهندسی پذیرفته شده‌اند؟

ب) باتوجه به جدول فوق، چند درصد از متقاضیان خانم و چند درصد از متقاضیان آقا در دانشکده‌ی معماری پذیرفته شده‌اند؟

ج) توضیح دهید که چگونه ممکن است مطلب روزنامه و مقدارهایی که در قسمت‌های «الف» و «ب» به دست آورده‌اید، همگی درست باشند؟

جدول کتاب

دانشکده‌ی معماری: متقاضیان	دانشکده‌ی معماری: پذیرفته‌شدگان	دانشکده‌ی مهندسی: متقاضیان	دانشکده‌ی مهندسی: پذیرفته‌شدگان	
۵۰۰	۱۰۰	۴۰۰	۳۶۰	خانم
۲۰۰	۲۰	۱۰۰۰	۸۰۰	آقا

درصد پذیرفته‌شدگان = (پذیرفته‌شدگان ÷ متقاضیان) × ۱۰۰.

الف) مهندسی: خانم‌ها $\frac{360}{400} = 90\%$ ؛ آقایان $\frac{800}{1000} = 80\%$.

ب) معماری: خانم‌ها $\frac{100}{500} = 20\%$ ؛ آقایان $\frac{20}{200} = 10\%$.

ج) درصد کل: خانم‌ها $900 = 500 + 400$ متقاضی و $460 = 100 + 360$ پذیرفته‌شده‌اند: $\frac{460}{900} \approx 51\%$ آقایان $200 +$

$1200 = 1000$ متقاضی و $820 = 20 + 800$ پذیرفته‌شده‌اند: $\frac{820}{1200} \approx 68\%$. پس عددهای روزنامه درست‌اند.

با این حال در هر یک از دو دانشکده، درصد پذیرش خانم‌ها از آقایان بیشتر است (۹۰٪ در برابر ۸۰٪ و ۲۰٪ در برابر ۱۰٪). دلیل این تناقض ظاهری آن است که تعداد متقاضیان دو گروه در دو دانشکده یکسان نیست: بیشتر خانم‌ها (۵۰۰ نفر از ۹۰۰ نفر) متقاضی معماری‌اند که پذیرش در آن سخت است (فقط ۱۰٪ تا ۲۰٪)، ولی بیشتر آقایان (۱۰۰۰ نفر از ۱۲۰۰ نفر) متقاضی مهندسی‌اند که پذیرش در آن آسان‌تر است (۸۰٪ تا ۹۰٪). درصد کل در واقع میانگینی از درصدهای دو دانشکده است که وزن آن‌ها (تعداد متقاضیان) برای دو گروه فرق دارد؛ بنابراین درصد کل خانم‌ها کمتر می‌شود.

نتیجه: آمار کلی روزنامه درست است، ولی نتیجه‌گیری «به خانم‌ها کمتر پذیرش می‌دهند» از آن درست نیست.

توشه‌ای برای موفقیت

مسئله

صفحه ۱۲۱

۸

۶. در اواخر قرن نوزدهم میلادی، جنگی بین آمریکا و اسپانیا درگرفت. در این جنگ، در نیروی دریایی آمریکا از هر هزار نفر، نه نفر جان خود را از دست داده بودند. در همین زمان در شهر نیویورک، آمار مرگ‌ومیر شانزده

نفر در هر هزار نفر بوده است. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا زندگی در نیویورک آنقدر پرخطر بوده که رفتن به میدان جنگ بهتر از قدم زدن در خیابان‌های نیویورک بوده است؟!

عددها: نیروی دریایی $\frac{9}{1000}$ (یعنی ۰/۹٪) و شهر نیویورک $\frac{16}{1000}$ (یعنی ۱/۶٪)؛ و $16 > 9$. ولی از این مقایسه نمی‌توان نتیجه گرفت که زندگی در نیویورک از جنگ خطرناک‌تر بوده است، چون دو گروه با هم قابل مقایسه نیستند:

- نیروی دریایی از جوانان و مردان بالغ سالم و گزینش شده تشکیل شده است؛ ولی جمعیت شهر شامل همه‌ی سنین، از جمله نوزادان، سالمندان و بیماران است که احتمال مرگشان بسیار بیشتر است.
 - بنابراین حتی در شرایط عادی هم نرخ مرگ در یک شهر (با جمعیت همه‌ی سنین) از نرخ مرگ یک گروه جوان و سالم بیشتر است؛ این به معنی خطرناک‌تر بودن زندگی در شهر برای یک جوان سالم نیست.
- نتیجه:** برای مقایسه‌ی درست، باید گروه‌های هم‌سن و هم‌وضعیت (مثلاً مردان جوان سالم نیویورک) را با نیروی دریایی مقایسه کرد؛ آمار کل دو گروه نامشابه چنین نتیجه‌ای نمی‌دهد.

مسئله

صفحه ۱۲۱

۹

۷. میانگین درآمد ۱۰ نفر از کارمندان یک شرکت خصوصی، ماهیانه ۲,۹۰۰,۰۰۰ تومان است. آقای پول‌پرست فکر کرد که اگر در این شرکت کار کند، خوشبخت می‌شود! به همین خاطر به سرعت در این شرکت مشغول به کار شد. پس از چند روز آقای پول‌پرست متوجه شد که حقوق مدیرعامل شرکت که ماهیانه بیست میلیون تومان است نیز در میانگین حقوق کارمندان محاسبه شده است.

الف) بدون در نظر گرفتن حقوق مدیرعامل، میانگین حقوق افراد دیگر شرکت، ماهانه چقدر است؟

ب) در چه شرایطی نمی‌توان به میانگین اعتماد کرد؟

الف) مدیرعامل جزو آن ۱۰ نفر است. مجموع حقوق ۱۰ نفر $= 29,000,000 = 2,900,000 \times 10$ تومان. با کم کردن حقوق مدیرعامل، مجموع حقوق ۹ نفر دیگر $= 9,000,000 = 29,000,000 - 20,000,000$ تومان می‌شود؛ میانگین: $\frac{9,000,000}{9} = 1,000,000$ تومان.

پاسخ: میانگین حقوق افراد دیگر ماهانه ۱,۰۰۰,۰۰۰ تومان است (کمتر از یک سوم میانگین اعلام شده).

ب) وقتی بین داده‌ها یک یا چند داده‌ی بسیار دور از بقیه (پرت) وجود داشته باشد، میانگین به سمت آن کشیده می‌شود و دیگر نماینده‌ی مقدار معمولی داده‌ها نیست. در همین مسئله ۹ نفر از ۱۰ نفر حقوقی برابر ۱,۰۰۰,۰۰۰ تومان دارند که خیلی کمتر از میانگین ۲,۹۰۰,۰۰۰ است. پس اگر داده‌ها خیلی پراکنده باشند یا داده‌ی پرت داشته باشند، به میانگین به تنهایی نباید اعتماد کرد.

۸. میانگین سن چهار نفر ۲۲ سال است. سن بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین فرد به ترتیب ۴۵ و ۷ سال است.
الف) برای سن دو نفر دیگر سه مثال بیاورید.
ب) اگر دو نفر دیگر هم سن باشند، سن هر کدام چند سال است؟

مجموع سن چهار نفر: $4 \times 22 = 88$. مجموع سن بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین: $45 + 7 = 52$. پس مجموع سن دو نفر دیگر $88 - 52 = 36$ است و سن هر یک باید بین ۷ و ۴۵ باشد.
الف) سه مثال (سن‌ها جمعاً ۳۶): ۱۰ و ۲۶، ۱۵ و ۲۱، ۸ و ۲۸. (هر دو عددی که جمعشان ۳۶ باشد و بین ۷ و ۴۵ قرار گیرند پذیرفتنی است). راستی‌آزمایی مثال اول: $22 = 88 \div 4 = (7 + 10 + 26 + 45) \div 4$.
ب) اگر هر دو سن برابر a باشد، $2a = 36$ و $a = 18$. پاسخ: هر کدام ۱۸ سال دارند.

۹. فرض کنید میانگین ده عدد که کوچک‌ترین آنها ۳ است، ۷٫۵ باشد.
الف) بزرگ‌ترین عدد حداقل چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟
ب) بزرگ‌ترین عدد حداکثر چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟

مجموع ده عدد: $10 \times 7.5 = 75$. یکی از عددها ۳ است، پس مجموع ۹ عدد دیگر $75 - 3 = 72$ است و هر یک از آن‌ها دست‌کم ۳ است.
الف) بزرگ‌ترین عدد از میانگین ۹ عدد دیگر کمتر نیست: اگر بزرگ‌ترین عدد M باشد، هر یک از آن ۹ عدد حداکثر M است، پس $9M \geq 72$ و $M \geq 8$. این مقدار شدنی است: عددهای ۳، ۸، ۸، ۸، ۸، ۸، ۸، ۸، ۸، ۸. مجموعشان $75 = 72 + 3$ است، میانگینشان ۷٫۵، کوچک‌ترینشان ۳ و بزرگ‌ترینشان ۸. پاسخ: ۸.
ب) بزرگ‌ترین عدد وقتی بیشترین مقدار را دارد که ۸ عدد دیگر تا حد ممکن کوچک، یعنی ۳ باشند: $27 = 3 \times 8 + 3$ ، پس بزرگ‌ترین عدد $75 - 27 = 48$ می‌شود. عددهای ۳، ۳، ۳، ۳، ۳، ۳، ۳، ۳، ۳، ۴۸. میانگین ۷٫۵ دارند. اگر بزرگ‌ترین عدد از ۴۸ بیشتر بود، مجموع نه عدد دیگر کمتر از ۲۷ می‌شد، در حالی که این نه عدد هر کدام حداقل ۳ هستند و مجموعشان حداقل ۲۷ است؛ این ممکن نیست. پاسخ: ۴۸.

۱۰. ده عدد طبیعی متمایز مثال بنویسید که بیش از ۵ عدد از این اعداد، از میانگین بزرگ‌تر باشد.

چند عدد کوچک و تعدادی عدد بزرگ‌تر (ولی نزدیک به هم) می‌گیریم تا میانگین بین آن‌ها قرار گیرد. مثال:

مجموع: $۸۵ = ۱۰ + ۷۵ = (۱+۲+۳+۴) + (۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵)$ ؛ میانگین $۸۵ \div ۱۰ = ۸,۵$. اعداد ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵ یعنی ۶ عدد (بیش از ۵ عدد) از $۸,۵$ بزرگ‌ترند و ده عدد با هم متمایزند.

مسئله

صفحه ۱۲۲

۱۳

۱۱. الف) سه نقطه روی محور اعداد صحیح بیابید که میانگین آنها صفر باشد. این مسئله چند جواب دارد؟
 ب) هر یک از سه نقطه‌ی قسمت قبل را ۴ واحد به سمت راست منتقل کنید. میانگین سه نقطه‌ی جدید را به دست آورید.

ج) پنج نقطه روی محور اعداد بیابید که میانگین آنها $-۲,۵$ باشد.

د) چهار نقطه‌ی غیر صحیح روی محور اعداد بیابید که میانگین آنها -۱۸ باشد.

ه) اگر میانگین ده عدد دلخواه برابر $\bar{x}$ باشد و هر یک از این ده عدد را با $۷,۲۳$ جمع بزنیم، میانگین ده عدد جدید را بر حسب $\bar{x}$ به دست آورید.

الف) میانگین سه عدد صفر است یعنی مجموعشان صفر است. مثال: $۱, ۰, -۱$ (مجموع ۰)؛ مثال‌های دیگر: $۲, ۰, -۲$, $۱, ۲, -۳$. این مسئله بی‌شمار جواب دارد: هر دو عدد صحیح دلخواه a و b را بگیریم، عدد سوم $c = -(a+b)$ صحیح است و مجموع $a+b+c=۰$ می‌شود (مثلاً $k, ۰, -k$ به ازای هر عدد طبیعی k).

ب) برای $۱, ۰, -۱$ نقطه‌های جدید $۵, ۴, ۳$ می‌شوند و میانگین $۴ = ۳ \div (۳+۴+۵)$ است. در حالت کلی نیز: $۱۲ = (a+b+c) + ۱۲ = (a+۴) + (b+۴) + (c+۴)$ ، پس میانگین از ۰ به $۴ = ۱۲ \div ۳$ می‌رسد (انتقال همه‌ی داده‌ها به اندازه‌ی ۴، میانگین را هم ۴ واحد جابه‌جا می‌کند).

ج) مجموع پنج عدد باید $-۱۲,۵ = ۵ \times (-۲,۵)$ شود. عددهای $-۰,۵, -۱,۵, -۲,۵, -۳,۵, -۴,۵$ (پنج عدد متوالی با فاصله‌ی ۱ حول $-۲,۵$) مجموع $-۱۲,۵$ و میانگین $-۲,۵$ دارند.

د) مجموع چهار عدد باید $-۷۲ = ۴ \times (-۱۸)$ شود. عددهای $-۱۶,۵, -۱۷,۵, -۱۸,۵, -۱۹,۵$ غیر صحیح‌اند و مجموعشان $-۷۲ = -۳۴ - ۳۸ = (-۱۶,۵ - ۱۷,۵) + (-۱۸,۵ - ۱۹,۵)$ است؛ پس میانگین -۱۸ است.

ه) اگر ده عدد $x_1, \dots, x_{10}$ باشند، $x_1 + \dots + x_{10} = ۱۰\bar{x}$. مجموع عددهای جدید $۱۰\bar{x} + ۱۰ \times ۷,۲۳$ است و میانگین جدید $\bar{x} + ۷,۲۳ = (۱۰\bar{x} + ۷۲,۳) \div ۱۰$ است. پاسخ: میانگین جدید $\bar{x} + ۷,۲۳$ است.

۱۲. در جدول زیر، رابطه‌ای بین اعداد سطر اول، سطر دوم و سطر سوم برقرار است. اگر در سطر اول عدد x را قرار دهیم، در سطر دوم و سطر سوم چه عددی بر حسب x قرار می‌گیرد؟ میانگین اعداد سطر اول چه ارتباطی با میانگین اعداد سطر دوم و سوم دارد؟

جدول کتاب (از راست به چپ)

ستون ۴	ستون ۳	ستون ۲	ستون ۱	
۴	۲	۱	۶	سطر اول
۴۸	۲۴	۱۲	۷۲	سطر دوم
۱۴۸	۱۲۴	۱۱۲	۱۷۲	سطر سوم

سطر دوم: $۷۲ = ۶ \times ۱۲$ ، $۱۲ = ۱ \times ۱۲$ ، $۲۴ = ۲ \times ۱۲$ ، $۴۸ = ۴ \times ۱۲$ ؛ یعنی هر عدد سطر دوم، ۱۲ برابر عدد بالایش است. سطر سوم: $۱۷۲ = ۷۲ + ۱۰۰$ ، $۱۱۲ = ۱۲ + ۱۰۰$ ، $۱۲۴ = ۲۴ + ۱۰۰$ ، $۱۴۸ = ۴۸ + ۱۰۰$ ؛ یعنی هر عدد سطر سوم، ۱۰۰ واحد بیشتر از عدد بالایش در سطر دوم است.

پاسخ اول: اگر در سطر اول x باشد، در سطر دوم $۱۲x$ و در سطر سوم $۱۲x + ۱۰۰$ قرار می‌گیرد.

میانگین‌ها: میانگین سطر اول $۳,۲۵ = ۱۳ \div ۴ = (۶+۱+۲+۴) \div ۴$ ؛ سطر دوم $۱۵۶ \div ۴ = (۷۲+۱۲+۲۴+۴۸) \div ۴$ ؛ سطر سوم $۱۳۹ = ۵۵۶ \div ۴ = (۱۷۲+۱۱۲+۱۲۴+۱۴۸) \div ۴$. در حالت کلی اگر میانگین سطر اول $\bar{x}$ باشد: میانگین سطر دوم $۱۲\bar{x}$ (ضرب همه‌ی داده‌ها در ۱۲، میانگین را هم ۱۲ برابر می‌کند) و میانگین سطر سوم $۱۲\bar{x} + ۱۰۰$ (افزودن ۱۰۰ به همه‌ی داده‌ها، میانگین را ۱۰۰ واحد زیاد می‌کند) است. بررسی: $۱۲ \times ۳,۲۵ + ۱۰۰ = ۳۹$ و $۱۰۰ = ۱۳۹$.

پاسخ دوم: میانگین سطر دوم ۱۲ برابر میانگین سطر اول و میانگین سطر سوم برابر (۱۲ برابر میانگین سطر اول) + ۱۰۰ است.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۳. حمید و عماد هر کدام در پنج درس امتحان داده‌اند. میانگین هر یک از آنها در این پنج درس، ۸۰ از ۱۰۰ بوده است. نمره‌ی حمید در چهار درس از عماد بهتر بوده و عماد فقط در یک درس نمره‌ی بهتری از حمید گرفته است. مثالی از نمره‌های حمید و عماد در این پنج درس ارائه دهید.

عماد در یک درس خیلی بهتر است تا کمبود چهار درس دیگر را جبران کند. مثال:

درس	۱	۲	۳	۴	۵	مجموع	میانگین
حمید	۷۸	۷۸	۷۸	۷۸	۸۸	۴۰۰	۸۰
عماد	۷۷	۷۷	۷۷	۷۷	۹۲	۴۰۰	۸۰

هر دو مجموع ۴۰۰ و میانگین $۸۰ = ۴۰۰ \div ۵$ دارند؛ حمید در درس‌های ۱ تا ۴ ($۷۸ > ۷۷$) بهتر است و عماد فقط در درس ۵ ($۹۲ > ۸۸$) همه‌ی نمره‌ها از ۱۰۰ کم‌ترند. (مثال‌های دیگر هم ممکن است.)

مسئله

صفحه ۱۲۳

۱۶

۱۶. فائزه و غزاله برای به‌دست آوردن میانگین اعداد ۱۷۶۶، ۱۷۶۰، ۱۷۵۵ و ۱۷۵۰، راه‌حل‌های زیر را ارائه داده‌اند. درستی راه‌حل این دو نفر را بررسی کنید و هریک را شرح دهید.
راه‌حل فائزه: $۱۷۵۷,۷۵ = ۴ \div ۷۰۳۱ = ۴ \div (۱۷۶۶ + ۱۷۶۰ + ۱۷۵۵ + ۱۷۵۰)$
راه‌حل غزاله: $۱۷۵۷,۷۵ = ۷,۷۵ + ۱۷۵۰ = ۴ \div ۳۱ + ۱۷۵۰ = ۴ \div (۱۶ + ۱۰ + ۵ + ۰) + ۱۷۵۰$

راه‌حل فائزه: مستقیماً از تعریف میانگین (مجموع داده‌ها $\div$ تعداد داده‌ها) استفاده کرده است:
 $۷۰۳۱ = ۱۷۶۶ + ۱۷۶۰ + ۱۷۵۵ + ۱۷۵۰$ و $۷۰۳۱ \div ۴ = ۱۷۵۷,۷۵$ درست است.

راه‌حل غزاله: همان «روش غزاله» درس را به‌کار برده است: عدد حدسی ۱۷۵۰ (کوچک‌ترین داده) را انتخاب کرده و تفاضل داده‌ها از آن را نوشته است: $۰ = ۱۷۵۰ - ۱۷۵۰$ ، $۵ = ۱۷۵۵ - ۱۷۵۰$ ، $۱۰ = ۱۷۶۰ - ۱۷۵۰$ ، $۱۶ = ۱۷۶۶ - ۱۷۵۰$. میانگین این تفاضل‌ها $۷,۷۵ = ۳۱ \div ۴$ است و آن را به عدد حدسی افزوده است: $۱۷۵۷,۷۵ = ۱۷۵۰ + ۷,۷۵$. این روش درست است، چون مجموع تفاضل‌ها برابر «مجموع داده‌ها $- ۴ \times ۱۷۵۰$ » است؛ پس میانگین تفاضل‌ها برابر «میانگین $- ۱۷۵۰$ » می‌شود و با افزودن ۱۷۵۰، میانگین به‌دست می‌آید.

نتیجه: هر دو راه‌حل درست‌اند و پاسخ یکسان ۱۷۵۷,۷۵ دارند؛ راه‌حل غزاله چون با عددهای کوچک‌تر (۰، ۵، ۱۰، ۱۶) کار می‌کند، محاسبه‌ی ذهنی را ساده‌تر می‌کند.

مسئله

صفحه ۱۲۴

۱۷

۱۵. هوشنگ در چهار آزمون نمره‌های ۸۵، ۸۰، ۶۵ و ۹۵ را کسب کرده است.
(الف) هوشنگ در آزمون بعدی چه نمره‌ای بگیرد تا میانگین نمراتش حداقل ۸۰ بشود؟
(ب) اگر هوشنگ سه آزمون دیگر داشته باشد، میانگین این سه آزمون چقدر باشد تا میانگین هفت آزمون هوشنگ حداقل ۸۰ شود؟ برای نمره‌های هوشنگ دو حالت مختلف مثال بزنید.

مجموع چهار نمره: $۳۲۵ = ۸۵ + ۸۰ + ۶۵ + ۹۵$.

الف) میانگین پنج آزمون حداقل ۸۰ یعنی مجموع پنج نمره حداقل $400 = 80 \times 5$. اگر نمره ی بعدی x باشد: $325 + x \geq 400$ و $x \geq 75$. پاسخ: هوشنگ باید حداقل ۷۵ بگیرد.

ب) مجموع هفت نمره باید حداقل $560 = 80 \times 7$ باشد. پس مجموع سه نمره ی جدید باید حداقل $235 = 560 - 325$ باشد و میانگین آن ها حداقل $\frac{235}{3} = 78\frac{1}{3}$ (حدود ۷۸٫۳۳) است.

دو مثال: (۱) نمره های ۹۰، ۷۵، ۷۰: مجموع ۲۳۵ و میانگین هفت آزمون $80 = 560 \div 7 = (325 + 235) \div 7$.
(۲) نمره های ۸۰، ۸۰، ۸۰: مجموع ۲۴۰ و میانگین هفت آزمون $80 \approx 565 \div 7$ ، که بیش از ۸۰ است.

مسئله

صفحه ۱۲۶

۱۸

۱. در بازی حلقه ی شانس، شانس برد نفر اول چقدر است؟

طبق شرح بازی، چهار پاره خط موازی l_1, l_2, l_3, l_4 داریم و هر نفر پاره خط ها را از یک طرف دوبه دو (دو جفت) به هم وصل می کند. چهار پاره خط را به سه شکل می توان دو جفت کرد:

○ l_3l_4 و l_1l_2

○ l_2l_4 و l_1l_3

○ l_2l_3 و l_1l_4

نفر دوم از انتخاب نفر اول خبر ندارد، پس هر سه شکل برای او به یک اندازه ممکن است (۳ حالت هم شانس). با باز کردن کاغذ:

○ اگر نفر دوم همان جفت بندی نفر اول را انتخاب کرده باشد، هر دو جفت از بالا و پایین یک حلقه ی بسته می سازند و **دو حلقه** تشکیل می شود (همان مثال کتاب: هر دو l_2l_4 و l_1l_3) و نفر اول برنده است.

○ اگر جفت بندی ها متفاوت باشند، مثلاً بالا l_1l_2 و l_3l_4 و پایین l_2l_4 و l_1l_3 ، با حرکت روی منحنی $l_1 \leftarrow l_2 \leftarrow l_4 \leftarrow l_3 \leftarrow l_1$ از هر چهار پاره خط می گذریم و به نقطه ی شروع برمی گردیم؛ یعنی فقط **یک حلقه** تشکیل می شود (و نفر دوم برنده است). این وضع برای هر دو جفت بندی متفاوت پیش می آید.

برای هر انتخاب نفر اول، از ۳ انتخاب نفر دوم فقط ۱ انتخاب (همان) به دو حلقه می انجامد. پس شانس برد نفر اول: $\frac{1}{3}$.

پاسخ: $\frac{1}{3}$ (و شانس برد نفر دوم $\frac{2}{3}$)؛ با فرض اینکه نفر دوم بدون اطلاع از انتخاب نفر اول، هر یک از سه جفت بندی را به یک اندازه ممکن بزند.

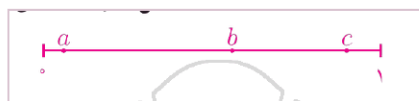
این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



۲. در هر یک از قسمت‌های زیر، «صفر»، «یک» یا «بین صفر و یک» بودن احتمال پیشامد داده شده را بررسی کنید. در مواردی که احتمال بین صفر و یک است درباره‌ی نزدیک بودن آن به عددهای a ، b یا c (که در شکل زیر مشخص شده‌اند) بحث کنید.

- (الف) پیشامد اینکه در ده سال آینده آب خوراکی جیره‌بندی شود. (به شرط آنکه الگوی مصرف اصلاح نگردد).
 (ب) پیشامد اینکه آب در صفر درجه‌ی سانتی‌گراد بجوشد.
 (ج) پیشامد اینکه با سه تکه چوب به اضلاع ۲، ۷ و ۴ سانتی‌متر بتوانیم مثلث بسازیم.
 (د) پیشامد متولد شدن نوزاد در فصل تابستان



(در شکل، a نزدیک صفر، b حدود وسط و c نزدیک یک است.) احتمال هر پیشامد عددی بین ۰ و ۱ است؛ پیشامد محال احتمال ۰ و پیشامد حتمی احتمال ۱ دارد.

(الف) این پیشامد نه حتماً رخ می‌دهد و نه محال است، پس احتمالش **بین ۰ و ۱** است و مقدار دقیق آن را بدون اطلاعات و آمار نمی‌توان حساب کرد. با توجه به شرط مسئله (اصلاح نشدن الگوی مصرف) می‌توان استدلال کرد که رخ دادن آن محتمل است و احتمال آن به c (نزدیک ۱) نزدیک‌تر است تا به a . (پاسخ بحثی است.)

(ب) آب در شرایط عادی (فشار معمولی هوا) در ۱۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد می‌جوشد و در صفر درجه یخ می‌بندد؛ پس جوشیدن در صفر درجه محال است: احتمال ۰ =.

(ج) نامساوی مثلث: برای ساختن مثلث باید طول هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کمتر باشد. اما $۲ + ۴ = ۶$ و $۶ < ۷$ ؛ یعنی مجموع دو ضلع ۲ و ۴ از ضلع ۷ کمتر است. پس مثلثی با این سه چوب ساخته نمی‌شود: احتمال ۰ =.

(د) نوزاد می‌تواند در تابستان یا در هر فصل دیگری متولد شود؛ پس احتمال **بین ۰ و ۱** است. اگر تولدها در فصل‌ها تقریباً یکنواخت پخش شوند، تابستان یکی از چهار فصل است و احتمال حدود $\frac{1}{4} = ۰,۲۵$ می‌شود، که به صفر و حدود وسط نزدیک‌تر است تا به یک؛ یعنی به a و b نزدیک‌تر از c است.

۳. در یک جشن با ۱۳۵ مهمان، هنگام ورود هر فرد یک دستبند به او داده می‌شود. سه نوع دستبند به رنگ‌های بنفش، زرد و آبی و از هر نوع دستبند ۴۵ تا وجود دارد. هر رنگ از ۱ تا ۴۵ شماره‌گذاری شده است. در انتهای جشن قرار است یک نفر به تصادف انتخاب شود و جایزه‌ای بگیرد.
 (الف) احتمال اینکه فردی با دستبند زرد و شماره‌ی ۲۴ انتخاب شود، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه فردی با دستبند بنفش و شماره‌ای بین ۱۳ و ۲۰ انتخاب شود، چیست؟
 ج) احتمال اینکه فردی انتخاب شود که دستبند آبی داشته باشد یا شماره‌ی دستبند او شماره‌ی ۱۲ باشد، چقدر است؟

د) احتمال اینکه فردی انتخاب شود که شماره‌ی دستبند او عدد اول نباشد، چیست؟

کل حالت‌های ممکن (هم‌شانس): ۱۳۵ نفر؛ احتمال = (تعداد حالت‌های مطلوب) ÷ (تعداد کل حالت‌ها).

الف) فقط یک دستبند زرد با شماره‌ی ۲۴ وجود دارد: $\frac{1}{135}$.

ب) «بین ۱۳ و ۲۰» یعنی شماره‌های ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹ (۶ شماره)؛ از دستبند بنفش ۶ دستبند مطلوب است: $\frac{6}{135} = \frac{2}{45}$. (اگر خود ۱۳ و ۲۰ هم شمرده شوند، ۸ شماره و احتمال $\frac{8}{135}$ می‌شود).

ج) شماره‌های ۱۲ عبارت‌اند از ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۱۲ (۶ عدد). دستبندهای آبی: ۴۵ تا. دستبندهای غیرآبی با شماره‌ی شماره‌ی ۱۲: در هر یک از دو رنگ بنفش و زرد ۶ تا، یعنی $12 = 2 \times 6$. (نباید دستبندهای آبی با این شماره‌ها را دوباره بشماریم). تعداد مطلوب $45 + 12 = 57$: $\frac{57}{135} = \frac{19}{45}$.

د) عددهای اول بین ۱ و ۴۵: ۴۳، ۴۱، ۳۷، ۳۱، ۲۹، ۲۳، ۱۹، ۱۷، ۱۳، ۱۱، ۷، ۵، ۳، ۲ (۱۴ عدد؛ عدد ۱ اول نیست). در هر رنگ $31 = 45 - 14$ شماره اول نیست؛ برای سه رنگ $93 = 3 \times 31$: $\frac{93}{135} = \frac{31}{45}$.

مسئله

صفحه ۱۲۷

۲۱

۴. اعداد ۱ تا ۳۰ روی ۳۰ گوی نوشته شده‌اند و گوی‌ها داخل یک کیسه قرار دارند. یک گوی را به تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف) چقدر احتمال دارد عدد نوشته شده روی گویی که انتخاب می‌کنیم، بزرگ‌تر از ۱۵ باشد؟

ب) چقدر احتمال دارد عدد انتخاب شده فرد باشد؟

ج) چقدر احتمال دارد عدد انتخاب شده عددی اول باشد؟

د) آیا می‌توانید مسئله‌ای بسازید که جواب آن با مجموع مقدارهای به دست آمده در قسمت «الف»، «ب» و «ج» برابر باشد.

الف) عددهای ۱۶ تا ۳۰: $30 - 15 = 15$ عدد؛ احتمال $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

ب) عددهای فرد ۱ تا ۳۰: ۱، ۳، ...، ۲۹؛ یعنی ۱۵ عدد؛ احتمال $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

ج) عددهای اول تا ۳۰: ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹ (۱۰ عدد)؛ احتمال $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

د) مجموع سه مقدار: $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. چون احتمال هر پیشامد عددی بین ۰ و ۱ است و $\frac{4}{3}$ از ۱ بزرگ‌تر است، هیچ مسئله‌ای (درباره‌ی انتخاب یک گوی) نمی‌توان ساخت که پاسخش $\frac{4}{3}$ باشد.

(پیشامدهای «الف»، «ب» و «ج» با هم اشتراک دارند، مثلاً ۱۷ و ۱۹ هم بزرگ‌تر از ۱۵، هم فرد و هم اولند؛ پس احتمال «یکی از آن‌ها» با جمع احتمال‌ها برابر نیست.)

۵. در ظرفی تعدادی مهره‌ی رنگی وجود دارد. اگر بخواهیم یک مهره به تصادف از این ظرف انتخاب کنیم، احتمال انتخاب شدن مهره‌ی آبی، قرمز و زرد به ترتیب $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{7}$ و $\frac{1}{6}$ خواهد بود.
 الف) آیا در این ظرف به غیر از رنگ‌های آبی، قرمز و زرد، مهره‌ای با رنگ دیگر وجود دارد؟
 ب) اگر پاسخ قسمت «الف» بلی است، آیا می‌توان گفت چند رنگ در این ظرف دیده می‌شود؟
 ج) آیا می‌توان گفت در این ظرف از هر رنگ چند مهره وجود دارد؟

$$\text{مجموع احتمال همه‌ی رنگ‌ها برابر ۱ است. مجموع سه احتمال داده شده: } \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} = \frac{28}{42} + \frac{6}{42} + \frac{7}{42} = \frac{41}{42}$$

الف) بله. چون $\frac{41}{42} > 1$ ، احتمال انتخاب مهره‌ای از رنگ‌های دیگر $1 - \frac{41}{42} = \frac{1}{42}$ است که صفر نیست؛ پس مهره‌هایی با رنگ دیگر وجود دارند.

ب) خیر. فقط می‌دانیم که احتمال انتخاب مهره‌ای از رنگ‌های دیگر روی هم $\frac{1}{42}$ است؛ این مهره‌ها می‌توانند همه از یک رنگ یا از چند رنگ مختلف باشند. پس تعداد رنگ‌ها را نمی‌توان گفت (فقط می‌دانیم دست کم ۴ رنگ هست).

ج) خیر. اگر تعداد کل مهره‌ها N باشد، آبی‌ها $\frac{2N}{3}$ ، قرمزها $\frac{N}{7}$ و زردها $\frac{N}{6}$ و بقیه $\frac{N}{42}$ مهره‌اند؛ پس N باید مضرب ۴۲ باشد، ولی خودش معلوم نیست. مثلاً با $N = 42$: ۲۸ آبی، ۶ قرمز، ۷ زرد و ۱ مهره‌ی دیگر؛ با $N = 84$: ۵۶ آبی، ۱۲ قرمز، ۱۴ زرد و ۲ مهره‌ی دیگر. هر دو حالت با داده‌های مسئله سازگارند، پس تعداد هر رنگ را نمی‌توان گفت.

۶. الف) در صفحه‌ی مختصات، مختصات همه‌ی نقاط صحیحی را مشخص کنید که $x > 0$ و $y < 4$ باشد.
 ب) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. اگر نقطه‌ی C را بطور تصادفی از نقاط قسمت «الف» (متمایز از نقطه‌ی A و B) انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد که ABC یک مثلث باشد؟
 ج) فرض کنید $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. دو نقطه‌ی متمایز Y و Z را بطور تصادفی از نقاط قسمت «الف» (متمایز از X) انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که XYZ یک مثلث نباشد؟

الف) مختصات صحیح با $0 < x < 4$ یعنی $x \in \{1, 2, 3\}$ و $0 < y < 4$ یعنی $y \in \{1, 2, 3\}$. پس ۹ نقطه داریم: $(1,1)$ ، $(2,1)$ ، $(3,1)$ ، $(1,2)$ ، $(2,2)$ ، $(3,2)$ ، $(1,3)$ ، $(2,3)$ ، $(3,3)$.

ب) $A = (1,1)$ و $B = (2,1)$. نقطه‌ی C از ۷ نقطه‌ی باقی‌مانده انتخاب می‌شود. سه نقطه مثلث نمی‌سازند اگر روی یک خط باشند؛ خط AB همان خط $y = 1$ است و تنها نقطه‌ی دیگر قسمت «الف» روی آن $(3,1)$ است. پس ۶ نقطه از ۷ نقطه مثلث می‌سازند: $\frac{6}{7}$.

ج) $X = (2, 2)$ (مرکز). Y و Z از ۸ نقطه‌ی دیگر انتخاب می‌شوند؛ تعداد زوج‌های ممکن: $28 = (8 \times 7) \div 2$. سه نقطه مثلث نیستند اگر روی یک خط باشند؛ خط‌های گذرنده از X که دو نقطه‌ی دیگر دارند: خط افقی $y = 2$: $(3, 2), (1, 2)$ ؛ خط عمودی $x = 2$: $(2, 3), (2, 1)$ ؛ قطر $y = x$: $(3, 3), (1, 1)$ ؛ قطر دیگر: $(3, 1), (1, 3)$. یعنی ۴ زوج نامطلوب (مثلث نبودن): $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$.

مسئله

صفحه ۱۲۸

۲۴

۷. امیرحسین به تازگی با احتمال آشنا شده است. خواهر بزرگ او غزاله از امیرحسین می‌خواهد یک عدد سه رقمی تصادفی انتخاب کند و آن را تکرار کند تا یک عدد شش رقمی به دست آید. برای مثال اگر ۲۴۳ را انتخاب کرد، بنویسد ۲۴۳۲۴۳. غزاله به امیرحسین گفت: اگر تقسیم عدد شش رقمی تو بر ۷ باقی‌مانده‌ای به غیر از صفر داشت، تو برنده‌ی بازی هستی و اگر باقی‌مانده صفر بود من برنده‌ام.

الف) چقدر احتمال دارد که باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد سه رقمی تصادفی بر ۷ برابر صفر نباشد؟
ب) چقدر احتمال دارد که باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد شش رقمی امیرحسین بر ۷ برابر صفر نباشد؟

الف) عددهای سه رقمی: از ۱۰۰ تا ۹۹۹، یعنی $999 - 99 = 900$ عدد. مضرب‌های ۷ در این بازه: (۱۴۲ مضرب ۷ تا ۹۹۹ و ۱۴ مضرب ۷ تا ۹۹، از $999 \div 7 = 142, 7...$ و $99 \div 7 = 14, 1...$ یعنی $128 = 142 - 14$ عدد (باقی‌مانده‌ی صفر). پس عددهایی با باقی‌مانده‌ی غیر صفر $772 = 900 - 128$ عدد است: $\frac{772}{900} = \frac{193}{225} \approx 0,86$.

ب) اگر عدد سه رقمی N باشد، عدد شش رقمی $N \times 1000 + N = N \times 1001$ است. چون $1001 = 7 \times 143$ (یا 11×91)، این عدد همیشه مضرب ۷ است و باقی‌مانده‌ی آن بر ۷ همیشه صفر است. مثال: $243243 = 243 \times 1001 = 243 \times 7 \times 143$.

پاسخ: احتمال غیر صفر بودن باقی‌مانده ۰ است؛ یعنی غزاله همیشه برنده می‌شود (بازی منصفانه نیست).

مسئله

صفحه ۱۲۹

۲۵

نوشته‌ای برای موفقیت

۸. متن زیر را با دقت بخوانید و درباره‌ی آن با هم‌کلاسی‌های خود بحث کنید.

یک سکه را ده بار می‌اندازیم. هر ده بار پشت می‌آید. شما انتظار دارید در پرتاب یازدهم رو بیاید یا پشت؟ دو حالت وجود دارد: ۱. ایراد از سکه است و بنابراین باید انتظار داشت که بار یازدهم نیز پشت بیاید. ۲. این ده بار به‌طور اتفاقی پشت آمده و بنابراین احتمال پشت یا رو آمدن در بار یازدهم یکسان است. اما عده‌ای از مردم انتظار دارند که در پرتاب یازدهم رو بیاید. آنها چنین استدلال می‌کنند: «احتمال یازده بار پشت آمدن خیلی کمتر از ده بار پشت آمدن است، پس در پرتاب یازدهم رو می‌آید.» مردم با همین استدلال، گاهی اوقات زیر درختان صاعقه زده پناه می‌برند و گمان می‌کنند که صاعقه به‌ندرت دو بار بر یک جا اصابت می‌کند. در بمباران‌ها نیز بعضی اشخاص داخل گودال‌های بمب خورده می‌نشینند و تصور می‌کنند که احتمال دو بار اصابت بمب در یک مکان بسیار کم است. روان‌شناسانی که نحوه‌ی استدلال اشخاص در مورد احتمالات را

بررسی می‌کنند، می‌گویند: «تقریباً هرکس در معرض چنین اشتباهی قرار دارد. این استدلال اگرچه درست نیست، اما با عادت ذهنی آدمی مطابقت دارد.»

نکته‌ی اصلی: مردم احتمال «یازده بار پشت» (پیش از شروع پرتاب‌ها) را با احتمال پرتاب یازدهم، «وقتی ده بار پشت آمده است»، اشتباه می‌گیرند.

○ اگر سکه سالم باشد، پرتاب‌ها از هم مستقل‌اند: نتیجه‌ی ده پرتاب قبلی بر پرتاب یازدهم اثری ندارد. پس احتمال رو آمدن در بار یازدهم همچنان $\frac{1}{2}$ و احتمال پشت آمدن هم $\frac{1}{2}$ است.

○ درست است که $(\frac{1}{2})^{10} < (\frac{1}{2})^{11}$ ، یعنی «یازده بار پشت» کم‌احتمال‌تر از «ده بار پشت» است؛ ولی احتمال شرطی «یازدهمی پشت باشد، به شرطی که ده تای اول پشت بوده‌اند» برابر است با $\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^{10} \div (\frac{1}{2})^{11}$. (ده پرتاب پشت قبلاً رخ داده و دیگر تصادفی نیست.)

○ حالت ۱ (ایراد از سکه) فقط وقتی درست است که سکه معیوب باشد؛ اگر سکه سالم باشد، حالت ۲ درست است و هیچ‌کدام از «رو می‌آید» یا «پشت می‌آید» محتمل‌تر نیست.

○ همین اشتباه در مثال صاعقه و بمب هم هست: احتمال اینکه دو بار صاعقه (یا بمب) دقیقاً به یک جا بخورد کم است، ولی اگر یک بار خورده باشد، احتمال برخورد بار دوم به آن جا (در صورت مستقل بودن رخدادها) کمتر از بار اول نمی‌شود؛ پس پناه بردن به محل برخورد قبلی مزیتی ندارد.

نتیجه: استدلال «پس بار یازدهم رو می‌آید» نادرست است.

مسئله

صفحه ۱۲۹

۲۶

۱. یک تاس شش‌وجهی و یک تاس چهاروجهی را باهم پرتاب می‌کنیم. (روی تاس شش‌وجهی اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ و روی تاس چهاروجهی اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ نوشته شده است.)

الف) فائزه و غزاله حالت‌هایی را که ممکن است در پرتاب دو تاس دیده شود، به‌صورت نمایش داده‌اند. راه‌حل این دو نفر را توضیح دهید.

ب) تعداد کل حالت‌ها چند تاست؟

ج) تعداد حالت‌هایی که عدد ظاهر شده روی تاس شش‌وجهی ۴ باشد چند تاست؟ آنها را با رنگ آبی در راه‌حل‌های بالا مشخص کنید.

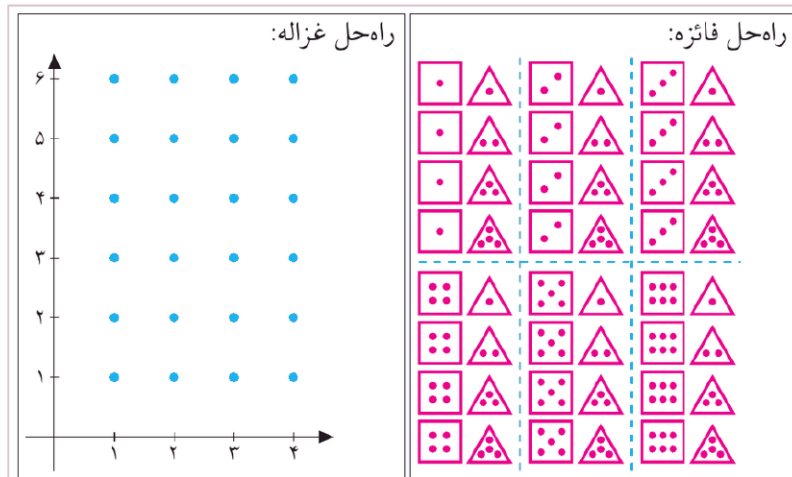
د) تعداد حالت‌هایی که عدد ظاهر شده روی تاس چهاروجهی بزرگ‌تر از ۲ باشد چند تاست؟ آنها را با رنگ زرد در راه‌حل‌های بالا مشخص کنید.

ه) احتمال اینکه عدد ظاهر شده روی تاس شش‌وجهی ۴ باشد، چقدر است؟

و) احتمال اینکه عدد ظاهر شده روی تاس چهاروجهی بزرگ‌تر از ۲ باشد، چقدر است؟

ز) خانه‌هایی که هم با رنگ آبی و هم با رنگ زرد رنگ شده‌اند چه کسری از کل شکل را نشان می‌دهند؟

(ج) آیا می‌توانید با دو تاس بالا مسئله‌هایی بسازید که پاسخ آنها برابر صفر، $1/5$ ، $2/3$ یا $3/4$ باشد؟



الف) راه‌حل فائزه: برای هر عدد تاس شش وجهی (مربع‌ها، ۶ دسته‌ی چهارتایی)، چهار حالت تاس چهاروجهی (مثلث‌ها با ۱، ۲، ۳ و ۴ نقطه) را کنار آن کشیده است؛ هر زوج «مربع + مثلث» یک حالت است. **راه‌حل غزاله:** هر حالت را با یک نقطه در صفحه‌ی مختصات نشان داده است: محور افقی عدد تاس چهاروجهی (۱ تا ۴) و محور عمودی عدد تاس شش وجهی (۱ تا ۶)؛ نقطه‌ی (x, y) یعنی «چهاروجهی x و شش وجهی y ». هر دو راه‌حل همه‌ی حالت‌ها را بدون تکرار نشان می‌دهند (ردیف‌ها و ستون‌ها را می‌توان شمرد).

ب) برای هر یک از ۶ حالت تاس شش وجهی، ۴ حالت تاس چهاروجهی هست: $۴ \times ۶ = ۲۴$ حالت (در غزاله: $۴ \times ۶ = ۲۴$ نقطه).

ج) شش وجهی ۴ است و چهاروجهی هر یک از ۱ تا ۴: ۴ حالت. (آبی کردن: در راه‌حل فائزه، چهار زوج دسته‌ی مربع‌های چهارنقطه‌ای در پایین سمت چپ؛ در راه‌حل غزاله، چهار نقطه‌ی روی خط $y = ۴$).

د) چهاروجهی ۳ یا ۴ است (۲ حالت) و شش وجهی هر یک از ۶ عدد: $۱۲ = ۲ \times ۶$ حالت. (زرد کردن: در راه‌حل فائزه، زوج‌هایی که مثلث سه نقطه‌ای یا چهارنقطه‌ای دارند، در هر ۶ دسته؛ در راه‌حل غزاله، نقطه‌های روی دو خط $x = ۳$ و $x = ۴$).

توشه‌ای برای موفقیت

$$(۵) \frac{1}{6} = \frac{4}{24}$$

$$(۶) \frac{1}{6} = \frac{12}{72}$$

ز) هم آبی و هم زرد: شش وجهی ۴ و چهاروجهی ۳ یا ۴؛ یعنی ۲ خانه $(x=۳, y=۴)$ و $(x=۴, y=۴)$. کسر: $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ کل شکل.

ح) هر احتمال برابر است با تعداد حالت‌های مطلوب $\div ۲۴$:

- **صفر:** بله؛ پیشامد محال، مثلاً «روی تاس چهاروجهی عدد ۵ بیاید».
- **$1/5$:** خیر؛ چون $۲۴ \div ۱/5 = k$ نتیجه می‌دهد $k = ۲۴/5 = ۴/۸$ که عدد صحیح نیست (۲۴ بر ۵ بخش پذیر نیست).
- **$2/3$:** بله؛ $۲/3 = ۱۶/۲۴$ ، مثلاً «عدد روی تاس شش وجهی ۴ یا کمتر باشد» (۱۶ حالت: ۴×۴).

○ ۳/۴: بله؛ $۳/۴ = ۱۸/۲۴$ ، مثلاً «عدد روی تاس چهاروجهی ۳ یا کمتر باشد» (۱۸ حالت: ۳×۶).

۲۷

صفحه ۱۳۱

مسئله

۲. دو تاس شش وجهی را باهم پرتاب می‌کنیم.

الف) همه‌ی حالت‌های ممکن را نمایش دهید.

ب) احتمال اینکه حداقل یکی از دو تاس ۶ بیاید چقدر است؟ احتمال اینکه دقیقاً یک تاس ۶ بیاید چقدر است؟

ج) احتمال اینکه هیچ‌یک از تاس‌ها عدد اول نباشد، چقدر است؟

د) احتمال اینکه فقط روی یکی از تاس‌ها عدد اول ظاهر شود، چقدر است؟

ه) احتمال اینکه یک تاس زوج و دیگری فرد بیاید چقدر است؟

و) احتمال اینکه مجموع اعداد روی دو تاس عددی اول باشد، چقدر است؟

ز) در صورت وجود، پیشامدهایی را بیان کنید که احتمال وقوع آنها $۱/۳۶$ ، $۱/۷$ ، $۱/۴$ ، $۳/۴$ و $۴/۳$ باشد. برای هر یک از این پیشامدها مسئله بسازید و آنها را در جدول یا نموداری که در قسمت «الف» رسم کرده‌اید، نمایش دهید.

الف) هر حالت را با زوج (عدد تاس اول، عدد تاس دوم) نشان می‌دهیم؛ $۳۶ = ۶ \times ۶$ حالت هم‌شانس:

۶	۵	۴	۳	۲	۱	→ اول / دوم
(۶، ۱)	(۵، ۱)	(۴، ۱)	(۳، ۱)	(۲، ۱)	(۱، ۱)	۱
(۶، ۲)	(۵، ۲)	(۴، ۲)	(۳، ۲)	(۲، ۲)	(۱، ۲)	۲
(۶، ۳)	(۵، ۳)	(۴، ۳)	(۳، ۳)	(۲، ۳)	(۱، ۳)	۳
(۶، ۴)	(۵، ۴)	(۴، ۴)	(۳، ۴)	(۲، ۴)	(۱، ۴)	۴
(۶، ۵)	(۵، ۵)	(۴، ۵)	(۳، ۵)	(۲، ۵)	(۱، ۵)	۵
(۶، ۶)	(۵، ۶)	(۴، ۶)	(۳، ۶)	(۲، ۶)	(۱، ۶)	۶

ب) حالت‌هایی که هیچ تاسی ۶ نیست: $۵ \times ۵ = ۲۵$ ؛ پس حداقل یک ۶: $۳۶ - ۲۵ = ۱۱$ حالت: $\frac{۱۱}{۳۶}$. دقیقاً یک ۶:

(۶ روی تاس اول و غیر ۶ روی دوم) ۱×۵ و برعکس ۵×۱ ، جمعاً ۱۰ حالت: $\frac{۱۰}{۳۶} = \frac{۵}{۱۸}$.

ج) عددهای اول روی تاس: ۱، ۲، ۳، ۵؛ غیر اول: ۴، ۶ (۳ عدد). هیچ‌کدام اول نباشد: $۳ \times ۳ = ۹$ حالت: $\frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$.

د) فقط یکی اول: (اولی اول و دومی غیر اول) ۳×۳ به علاوه‌ی (برعکس) ۳×۳ ، جمعاً ۱۸ حالت: $\frac{۱۸}{۳۶} = \frac{۱}{۲}$.

ه) (زوج، فرد): $۳ \times ۳ = ۹$ و (فرد، زوج): $۳ \times ۳ = ۹$ ؛ جمعاً ۱۸ حالت: $\frac{۱۸}{۳۶} = \frac{۱}{۲}$.

و) مجموع اول (۲، ۳، ۵، ۷ یا ۱۱): مجموع $۱ \rightarrow ۲$ حالت، $۲ \rightarrow ۳$ حالت، $۳ \rightarrow ۴$ حالت، $۴ \rightarrow ۵$ حالت، $۵ \rightarrow ۶$ حالت، $۶ \rightarrow ۷$ حالت، $۷ \rightarrow ۸$ حالت؛ جمعاً $۱۵ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷$ حالت: $\frac{۵}{۱۲} = \frac{۱۵}{۳۶}$.

ز) احتمال = تعداد حالت‌های مطلوب $\div$ ۳۶ و عددی بین ۰ و ۱ است:

- $۱/۳۶$: بله؛ «هر دو تاس ۶ بیاید» (فقط خانه‌ی (۶، ۶) از جدول).
- $۱/۷$: خیر؛ $k \div ۳۶ = ۱/۷$ یعنی $k = ۳۶/۷$ که صحیح نیست (۳۶ بر ۷ بخش پذیر نیست).
- $۱/۴$: بله؛ $۱/۴ = ۹/۳۶$ ، مثلاً «هر دو عدد زوج باشند» (ردیف‌ها و ستون‌های ۲، ۴، ۶: $۳ \times ۳ = ۹$ خانه از جدول).
- $۳/۴$: بله؛ $۳/۴ = ۲۷/۳۶$ ، مثلاً «دست‌کم یکی از دو عدد فرد باشد» (همه‌ی خانه‌های جدول به جز ۹ خانه‌ی «هر دو زوج»: $۳۶ - ۹ = ۲۷$).
- $۴/۳$: خیر؛ $\frac{۴}{۳}$ از ۱ بزرگ‌تر است و احتمال هیچ پیشامدی از ۱ بیشتر نمی‌شود.

مسئله

صفحه ۱۳۱

۲۸

۳. روی یک قطعه چوب شش خط برش طوری انتخاب شده که چوب را به هفت قسمت برابر تقسیم کرده است.

الف) به چند حالت می‌توان این تکه چوب را با دو برش، سه تکه کرد؟
ب) اگر دو خط برش را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد بتوان با سه قطعه چوب حاصل، مثلث ساخت؟

خط‌های برش را از چپ به راست ۱، ۲، ...، ۶ می‌نامیم؛ طول چوب ۷ واحد است.

الف) باید ۲ خط از ۶ خط را انتخاب کنیم (ترتیب مهم نیست). خط چپ‌تر را i و راست‌تر را j بنامیم ($i < j$): به ازای $i = ۱$: ۵ انتخاب برای j ، $i = ۲$: ۴، $i = ۳$: ۳، $i = ۴$: ۲، $i = ۵$: ۱؛ جمعاً $۱۵ = ۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۱$ حالت.

ب) سه قطعه به طول‌های i ، $j - i$ و $۷ - j$ می‌شوند (مجموعشان ۷). طبق نامساوی مثلث، مثلث ساخته می‌شود اگر طول هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کمتر باشد، یعنی هر ضلع کمتر از $۷/۲ = ۳.۵$ یعنی (چون صحیح است) حداکثر ۳ باشد. سه عدد صحیح مثبت با مجموع ۷ که هر یک حداکثر ۳ است، فقط این‌ها هستند: (۱، ۳، ۳) و (۲، ۲، ۳) با جابه‌جایی‌هایشان:

طول قطعه‌ها	خط‌های برش (i, j)
$(۳, ۳, ۱)$	$(۴, ۱)$
$(۳, ۱, ۳)$	$(۴, ۳)$
$(۱, ۳, ۳)$	$(۶, ۳)$
$(۳, ۲, ۲)$	$(۴, ۲)$
$(۲, ۳, ۲)$	$(۵, ۲)$
$(۲, ۲, ۳)$	$(۵, ۳)$

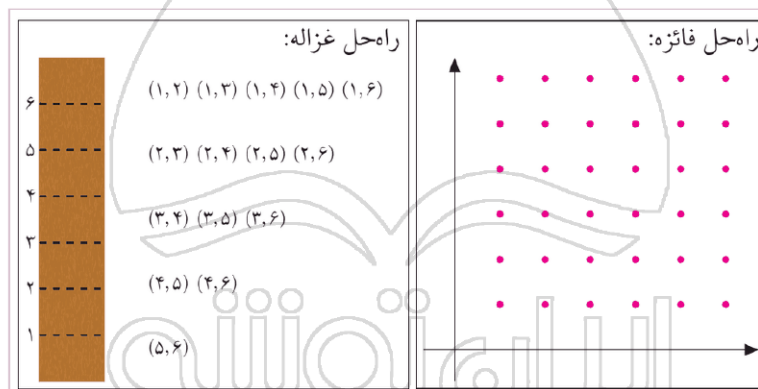
پس ۶ حالت مطلوب از ۱۵ حالت: $\frac{۲}{۵} = \frac{۶}{۱۵}$. (حالت‌های دیگر مثل $(۵, ۱, ۱)$ یا $(۴, ۱, ۲)$ مثلث نمی‌دهند، چون یک ضلع از مجموع دو ضلع دیگر بزرگ‌تر یا برابر است.)

مسئله

صفحه ۱۳۲

۲۹

۴. فائزه و غزاله قسمت «الف» مسئله‌ی قبل را به صورت زیر حل کرده‌اند. درباره‌ی این راه‌حل‌ها بحث کنید.



راحل غزاله: زوج‌های (i, j) با $i < j$ را یکی یکی نوشته است: با $۱ \rightarrow ۵$ زوج، با $۲ \rightarrow ۴$ زوج، با $۳ \rightarrow ۳$ زوج، با $۴ \rightarrow ۲$ زوج، با $۵ \rightarrow ۱$ زوج. یعنی هر برش دوتایی فقط یک بار شمرده شده و تعداد $۱۵ = ۵+۴+۳+۲+۱$ است.

راحل فائزه: نقطه‌های (i, j) با $i, j \in \{۱, \dots, ۶\}$ را در صفحه‌ی مختصات رسم کرده است: $۶ \times ۶ = ۳۶$ نقطه. ولی همه‌ی این نقطه‌ها برش دوتایی نیستند:

- ۶ نقطه‌ی (i, i) (هر دو برش روی یک خط) برش دوتایی نیستند و باید کنار گذاشته شوند: $۳۶ - ۶ = ۳۰$.
- هر برش دوتایی دو بار شمرده شده است، یک بار (i, j) و یک بار (j, i) (چون ترتیب برش‌ها مهم نیست). پس باید تقسیم بر ۲ کرد: $۳۰ \div ۲ = ۱۵$.

نتیجه: هر دو روش به عدد ۱۵ می‌رسند. روش غزاله مستقیم و بدون تکرار شمرده است؛ روش فائزه همه‌ی زوج‌های مرتب را می‌شمرد و سپس حالت‌های نامعتبر و تکراری را حذف می‌کند.

۵. یک عدد طبیعی را «فردچهره» می‌نامیم هرگاه همه‌ی رقم‌هایش فرد باشد.

الف) چند عدد چهار رقمی فردچهره وجود دارد؟

ب) یک عدد پنج رقمی به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این عدد فردچهره باشد؟

ج) ابتدا تعریفی برای عدد «زوج‌چهره» ارائه دهید. سپس پاسخ پرسش قسمت «ب» را این بار برای عدد زوج‌چهره به دست آورید.

الف) رقم‌های فرد: ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ (۵ رقم). هر یک از ۴ رقم عدد را ۵ جور می‌توان انتخاب کرد (برای هر رقم، ۵ انتخاب مستقل): $5^4 = 625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$ عدد.

ب) تعداد عددهای پنج رقمی: از ۱۰۰۰۰ تا ۹۹۹۹۹؛ $99999 - 9999 = 90000$ عدد (یا $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 90000$).
عددهای پنج رقمی فردچهره: $5^5 = 3125$. احتمال: $\frac{3125}{90000} = \frac{5}{144} \approx 0.035$.

ج) تعریف: عدد طبیعی را «زوج‌چهره» می‌نامیم هرگاه همه‌ی رقم‌هایش زوج باشد (رقم‌های زوج: ۰، ۲، ۴، ۶، ۸).

عددهای پنج رقمی زوج‌چهره: رقم اول نمی‌تواند ۰ باشد، پس ۴ انتخاب (۲، ۴، ۶، ۸) و هر یک از ۴ رقم دیگر ۵ انتخاب: $4 \times 5^4 = 2500$. احتمال: $\frac{2500}{90000} = \frac{1}{36} \approx 0.028$.

۶. سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که حداقل دو بار رو ظاهر شود؟

هر پرتاب ۲ حالت (رو R یا پشت P) دارد؛ سه پرتاب $2 \times 2 \times 2 = 8$ حالت هم‌شانس: RRR، RRP، RPR، PRR، RPP، PRP، PPR، PPP.

حداقل دو رو: دقیقاً دو رو (۳ حالت: RRP، RPR، PRR) یا سه رو (۱ حالت: RRR)؛ جمعاً ۴ حالت. احتمال: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

۷. خانه‌های یک جدول 2×2 را به تصادف با رنگ سیاه یا سفید رنگ می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که هر دو خانه‌ی ردیف اول این جدول سفید باشد؟

جدول ۴ خانه دارد و هر خانه ۲ رنگ ممکن: $2^4 = 16$ حالت رنگ‌آمیزی. اگر دو خانه‌ی ردیف اول سفید باشند، هر یک از دو خانه‌ی ردیف دوم آزاد است: $2 \times 2 = 4$ حالت. احتمال: $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

۸. در درس فیزیک بچه‌ها یاد گرفته‌اند که به کمک منشور می‌توانند طیف نور سفید (هفت رنگی که رنگ سفید ترکیب آنهاست) را تشکیل دهند. سپهر در فکر فرو رفته که آیا او می‌تواند با استفاده از این هفت رنگ برای خودش و دوستش رمزهایی بسازد. برای مثال (بنفش، نیلی، سبز، زرد، آبی، نارنجی، قرمز) برای آنها معنای خاصی داشته باشد و (نیلی، سبز، زرد، آبی، بنفش، نارنجی، قرمز) معنای دیگری داشته باشد.

(الف) سپهر چند رمز هفت رنگی می‌تواند بسازد؟

(ب) اگر سپهر بخواهد از این هفت رنگ فقط از چهار رنگ استفاده کند، چند رمز رنگی چهار رنگی مختلف با این هفت رنگ می‌تواند بسازد؟

(ج) اگر یکی از رمزهای هفت رنگی را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه رنگ اول رمز آبی و رنگ دوم سبز باشد چقدر است؟

(د) اگر یکی از رمزهای هفت رنگی را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه رنگ آبی بین دو رنگ سبز و قرمز باشد چقدر است؟ (لزومی ندارد آبی و سبز یا آبی و قرمز کنار هم باشند).

طبق مثال‌های کتاب، هر رمز ترتیبی از رنگ‌های متمایز است (ترتیب اهمیت دارد و رنگ تکراری نداریم).

(الف) برای رنگ اول ۷ انتخاب، برای رنگ دوم ۶، سوم ۵، ... و برای رنگ هفتم ۱ انتخاب داریم: $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$ رمز.

(ب) برای رنگ اول ۷، دوم ۶، سوم ۵ و چهارم ۴ انتخاب: $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ رمز چهار رنگی.

(ج) اگر رنگ اول آبی و رنگ دوم سبز باشد، پنج رنگ دیگر در پنج جایگاه باقی مانده به $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ حالت می‌نشینند. احتمال: $\frac{120}{5040} = \frac{1}{42}$ (راه دیگر: $\frac{1}{42} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{7}$).

(د) فقط ترتیب نسبی سه رنگ آبی، سبز و قرمز مهم است. این سه رنگ به $3 \times 2 \times 1 = 6$ ترتیب نسبی درمی‌آیند که همه به یک اندازه محتمل‌اند. آبی در وسط است در ترتیب‌های «سبز، آبی، قرمز» و «قرمز، آبی، سبز»: ۲ حالت از ۶. احتمال: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

توشه‌ای برای موفقیت

۹. طاقه‌هایی از شش رنگ پارچه داریم. می‌خواهیم با سه تکه پارچه‌ی هم‌عرض، پرچمی با سه رنگ متفاوت بدوزیم که در آن سه تکه افقی دوخته شوند.

(الف) چند پرچم متفاوت می‌توان ساخت؟

(ب) فرض کنید یکی از طاقه‌ها قرمز باشد. اگر به‌طور تصادفی سه رنگ برای دوخت پرچم انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد رنگ قرمز در پرچم به‌کار رفته باشد؟

(الف) تکه‌ی بالا ۶ انتخاب، تکه‌ی وسط ۵ انتخاب (رنگ متفاوت) و تکه‌ی پایین ۴ انتخاب: $6 \times 5 \times 4 = 120$ پرچم متفاوت.

ب) پرچم‌هایی که قرمز ندارند: سه رنگ از ۵ رنگ دیگر: $۳ \times ۴ \times ۵ = ۶۰$. پس پرچم‌های دارای قرمز $۶۰ - ۱۲۰ = ۱۲۰$ تاست و احتمال $\frac{۶۰}{۱۳۰} = \frac{۱}{۲}$. (راه دیگر: سه رنگ از شش رنگ انتخاب می‌شود، یعنی نصف رنگ‌ها: $\frac{۳}{۶}$).

مسئله

صفحه ۱۳۴

۳۵

۱۰. شش نامه و سه نفر پیک نامه‌رسان داریم. اگر این شش نامه را به تصادف بین سه نفر تقسیم کنیم، چقدر احتمال دارد که به پیک اول هیچ نامه‌ای نرسد؟

فرض (برداشت از مسئله): هر نامه به تصادف و مستقل از بقیه به یکی از سه پیک می‌رسد؛ پس هر نامه ۳ حالت دارد و کل حالت‌ها $۳^۶ = ۷۲۹$ است.

اگر به پیک اول هیچ نامه‌ای نرسد، هر نامه باید به یکی از دو پیک دیگر برسد: $۲^۶ = ۶۴$ حالت. احتمال: $\frac{۶۴}{۷۲۹} = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۶ \approx ۰,۰۸۸$.

تذکر: اگر منظور تقسیم «دوتا دوتا» باشد (به هر پیک دقیقاً دو نامه)، آنگاه به پیک اول همواره دو نامه می‌رسد و احتمال خواسته شده ۰ است؛ ولی چنین مسئله‌ای معنی ندارد و برداشت بالا مقصود مسئله است.

مسئله

صفحه ۱۳۴

۳۶

۱۱. یک تاس را سه بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که حداقل یک بار شش بیاید؟

کل حالت‌ها: $۶ \times ۶ \times ۶ = ۲۱۶$. حالتی که در هیچ پرتابی شش نیاید: هر پرتاب ۵ حالت: $۵ \times ۵ \times ۵ = ۱۲۵$. پس «حداقل یک شش»: $۲۱۶ - ۱۲۵ = ۹۱$ حالت. احتمال: $\frac{۹۱}{۲۱۶} \approx ۰,۴۲$.

مسئله

صفحه ۱۳۴

۳۷

۱۲. الف) در چند عدد هشت رقمی مجموع رقم‌ها زوج است؟

ب) یک عدد نه رقمی به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مجموع رقم‌های این عدد زوج باشد؟

الف) تعداد عددهای هشت رقمی: $۹ \times ۱۰^۷ = ۹۰,۰۰۰,۰۰۰$. عددها را بر اساس ۷ رقم اول دسته‌بندی می‌کنیم؛ $۹ \times ۱۰^۶ = ۹,۰۰۰,۰۰۰$ دسته. در هر دسته، رقم هشتم ۱۰ انتخاب (۰ تا ۹) دارد و پارتی (زوجی/فردی) مجموع ۷ رقم اول ثابت است: اگر مجموع زوج است رقم آخر باید زوج باشد (۰، ۲، ۴، ۶، ۸: ۵ انتخاب) و اگر فرد است رقم آخر باید فرد باشد (۱، ۳، ۵، ۷، ۹: ۵ انتخاب). پس در هر دسته دقیقاً ۵ عدد با مجموع زوج هست: $۹,۰۰۰,۰۰۰ \times ۵ = ۴۵,۰۰۰,۰۰۰$ عدد.

ب) با همین استدلال برای عددهای نه رقمی: به ازای هر انتخاب ۸ رقم اول، دقیقاً ۵ از ۱۰ رقم آخر مجموع را زوج می‌کند. پس نصف عددهای نه رقمی مجموع رقم زوج دارند: احتمال $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

مسئله

صفحه ۱۳۴

۳۸

۱۳. مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان تصمیم دارد از چهار نفر از دبیران دبیرستان فرزنانگان برای شرکت در جلسه‌ی طرح سؤال دعوت کند. نامه‌ای رسمی برای هر یک از این چهار دبیر برجسته نوشته شده و روی چهار پاکت نیز نام این دبیران نوشته شده است. اگر یکی از کارکنان مرکز، نامه‌ها را به طور تصادفی در پاکت‌ها قرار دهد،

- الف) احتمال اینکه فقط نامه‌ی یکی از دبیران در پاکتی اشتباه (که نام ایشان نیست) قرار بگیرد، چقدر است؟
ب) احتمال اینکه نامه‌ی دو نفر از دبیران در دو پاکت اشتباه قرار گیرد، چقدر است؟
ج) احتمال اینکه نامه‌ی چهار نفر دبیر در چهار پاکت اشتباه قرار گیرد، چقدر است؟
د) احتمال اینکه حداقل یک نامه در پاکت درست قرار بگیرد، چقدر است؟

نامه‌های دبیران ۱ تا ۴ را در پاکت‌های ۱ تا ۴ می‌گذاریم. هر قرار دادن یک ترتیب از اعداد ۱ تا ۴ است (عدد نام = شماره‌ی پاکتی که نامه‌ی دبیر i در آن رفته): کل حالت‌ها $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

الف) اگر نامه‌ی ۳ دبیر در پاکت درست باشد، پاکت باقی‌مانده فقط پاکت دبیر چهارم است و نامه‌ی او ناچار در پاکت درست می‌رود. پس «دقیقاً یک نامه اشتباه» ممکن نیست: احتمال ۰.

ب) (دقیقاً دو نامه اشتباه) باید دو نامه‌ی درست و دو نامه جابه‌جا شده باشند؛ انتخاب دو دبیر از چهار دبیر: $6 = 2 \times (4 \times 3)$ حالت (هر بار آن دو، پاکت‌های هم را می‌گیرند). احتمال: $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

ج) هیچ نامه‌ای در پاکت درست نباشد: ۹ حالت: ۴۳۲۱، ۴۳۱۲، ۴۲۱۳، ۳۴۲۱، ۳۴۱۲، ۳۱۴۲، ۲۴۱۳، ۲۳۴۱، ۲۱۴۳. (در هر ردیف، عدد نام $i \neq$). مثلاً برای نامه‌ی اول ۳ انتخاب ۲، ۳ یا ۴ برای هر کدام ۳ حالت باقی‌مانده. احتمال: $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

د) «حداقل یکی درست» متهم «هیچ‌کدام درست نیست» است: $\frac{5}{8} = 1 - \frac{3}{8}$ ؛ یعنی $24 - 9 = 15$ حالت از ۲۴: $\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$. (بررسی: حالت‌ها بر حسب تعداد نامه‌های اشتباه: $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 6, 3 \rightarrow 8, 4 \rightarrow 9$ ؛ مجموع $1+6+8+9 = 24$.)

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

